数理解析研究所講究録
358巻 1979年 31-56

Optimal return and optimality equation in controlled Markov jump processes

九大・理　大坪義夫

§1. はじめに

連続時間マルコフ過程における最適化問題は、多数の文献で論じられている。Miller[10], Kakumanu[8], Doshi[2], Yasuda[18], Pliska[12], Stone[15]は、マルコフ決定過程における最適政策問題を、Fakeev[5], Thompson[17], Shiryayev[14]は、最適停止問題を、それぞれ扱かっている。また、離散時間の場合に、Hordijk[7], Furukawa[6], Rieder[13]が、停止決定問題を扱かっている。ここでは、[6]に基づいて、終端利得をもつマルコフ・ジャンプ過程における最適化問題を、controlとしてpolicyとstopping ruleの両方を考えた場合について述べる。

§2. 問題の定式化

controlled Markov jump processは、5つの組（Z, A,

g, λ, Q) で表現される。ここに、

(1) state space S: Polish space の空でないBorel subset,
$Z \equiv S \times \mathbb{R}_+$, ただし $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

(2) action space A: Polish space の空でないBorel subset.
($\mathcal{B}(S)$, $\mathcal{B}(Z)$, $\mathcal{B}(A)$ をそれぞれ S, Z, A のBorel field とする。)

(3) terminal reward g: Z 上の有界実数値関数で、次をみたす; (i) 各 $t \geq 0$ に対して、$g(\cdot, t)$ は $\mathcal{B}(S)$-可測,
(ii) 各 $x \in S$ に対して、$g(x, \cdot)$ は $\mathbb{R}_+$ 上で右連続.

(4) "jump rate" $\lambda: Z \times A \to \mathbb{R}_+$ と Markov kernel Q は、次の条件をみたす;

(i) 各 $t \geq 0$ に対して, $\lambda(\cdot, t, \cdot)$ は $\mathcal{B}(S) \times \mathcal{B}(A)$ —可測.

(ii) 各 $(x, a) \in S \times A$ に対して. $\lambda(x, \cdot, a)$ は $\mathbb{R}_+$上で右連続.

(iii) 自然数 $M < \infty$ が存在して. すべての $(z, a) \in Z \times A$ に対して. $0 < \lambda(z, a) < M$.

(iv) 各 $(z, a) \in Z \times A$ に対して. $Q(\cdot \mid z, a)$ は $\mathcal{B}(S)$上の確率測度.

(v) 各 $(x, t, a) \in Z \times A$ に対して、$Q(\{x\} \mid x, t, a) = 0$.

(vi) 各 $(x, a) \in S \times A$ に対して. $Q(\Lambda \mid x, \cdot, a)$ はすべての $\Lambda \in \mathcal{B}(S)$ に独立に, $\mathbb{R}_+$上で区分的定数で右連続、かつ有限区間で有限個の不連続点をもつ.

(vii) 各 $t \geq 0$, $\Lambda \in \mathcal{B}(S)$ に対して、$Q(\Lambda \mid \cdot, t, \cdot)$ は $\mathcal{B}(S) \times \mathcal{B}(A)$ ー可測.

<u>policy</u> $\pi : Z \to A$ は次をみたすものとする;

(i) 各 $t \geq 0$ に対して、$\pi(\cdot, t)$ は $\mathcal{B}(S)/\mathcal{B}(A)$ ー可測.

(ii) 各 $x \in S$ に対して、$\pi(x, \cdot)$ は R_+ 上で区分的定数で右連続、かつ有限区間で有限個の不連続点をもつ.

$\Pi \equiv$ このような policy π の全体.

各 $\pi \in \Pi$ に対応する <u>jump process Z^π</u> $= (Z_t^\pi)_{t \geq 0} = (X_t^\pi, t)_{t \geq 0}$ は、次の確率法則にしたがって定める;

$$P_{(x,s)}^\pi [\nu(x,s) \leq t] = 1 - \exp\left\{-\int_s^{s+t} \lambda(x, s', \pi(x, s'))\, ds'\right\},$$

$$P_{(x,s)}^\pi [X_{t+s}^\pi \in \Lambda \mid \nu(x,s) = t] = Q(\Lambda \mid x, s+t, \pi(x, s+t)),$$

$$(x,s) \in Z, \quad t \geq 0, \quad \Lambda \in \mathcal{B}(S),$$

ただし、$\nu(x,s)$ は時刻 s で、state x を出発して random time $\nu(x,s)$ の間、そこにとどまる holding time である。このとき、Blumental-Getoor [1, Chap. I, §12] と同様にして、Z^π は Markov jump process になる。それで、<u>sample space Ω</u> を次をみたす関数 $\omega : R_+ \to Z$ の全体と考えてよい; (i) 各 $t \geq 0$ に対して、$y \in S$ が存在して、$\omega(t) = (y, t)$. (ii) 各 $t \geq 0$ に対して、左極限 $\omega(t-0)$

をもつ。 (iii) 各 $t \geq 0$ に対して、 $\omega(t) = (x, t)$ のとき、$h > 0$ が存在してすべての $h' \in [0, h]$ に対して、 $\omega(t+h') = (x, t+h')$。 各 $\omega, \omega' \in \Omega$ に対して、

$$\rho(\omega, \omega') = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{\rho_j(\omega, \omega')}{1+\rho_j(\omega, \omega')}$$

により、Ωを距離付けすると、Ω は Polish space になる。ただし、ρ_jは 区间$[j-1, j)$ 上の Ω における Skorohod metric である。 このことについては、Parthasarathy [11, Chap. VII, §6] と Kuratowski [9, Chap. III, §33] を参照されたい。

各 $0 \leq s \leq t$ に対して、 $\mathcal{F}_t^s \equiv \sigma(\omega(s') : s \leq s' \leq t)$, $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_\infty^0$。 各 $\pi \in \Pi$, $s \geq 0$ に対して、

$$C_s(\pi) \equiv \left\{ \text{stopping time } \tau \text{ w.r.t. } \{\mathcal{F}_t^s\}_{t \geq s} \;\middle|\; \text{すべての } x \in S \text{ に対して、} P_{(x,s)}^{\pi}(s \leq \tau < \infty) = 1 \right\}$$

とおく。

$\pi \in \Pi$, $\tau \in C_s(\pi)$ に対応する期待利得:

$$\varphi_\tau^\pi(x,s) \equiv E_{(x,s)}^\pi [g(Z_\tau^\pi)] \qquad (x,s) \in Z.$$

このとき、問題は、optimal return $u^*(x,s) = \sup_{\pi \in \Pi, \tau \in C_s(\pi)} \varphi_\tau^\pi(x,s)$ をみつけることである、$((x,s) \in Z)$。

$\pi^* \in \Pi$ かつ $\tau \in C_s(\pi)$, $s \geq 0$ とする。組 (π^*, τ^*) が optimal とは、すべての $(x,s) \in Z$ に対して、 $u^*(x,s) = \varphi_{\tau^*}^{\pi^*}(x,s)$ のとき

にいう。

§3. Universal measurability

X, Y を Polish space の空でない Borel subset とする。

$P(X) \equiv X$ 上のすべての確率測度の全体.

$P(Y|X) \equiv X$ を与えたときの Y 上の条件付確率測度の全体.

$\overline{P}(X) \equiv p \in P(X)$ なる dirac 測度 p の全体.

$\overline{P}(Y|X) \equiv p \in P(Y|X)$ なる dirac 測度 p の全体.

X と Y の product space を XY とかく。

・$H_n \equiv A\mathbb{R}_+^\circ\Omega \cdots\cdots A\mathbb{R}_+^\circ\Omega$ ($3n$ factors) $n \geq 1$,

$H \equiv A\mathbb{R}_+^\circ\Omega\cdots\cdots$, ただし、$A$ は action space,

$\mathbb{R}_+^\circ = \mathbb{R}_+ - \{0\}$, Ω は sample space.

$\widetilde{P}(H) \equiv H$ 上の確率測度で次をみたすものの全体;

すべての $p \in \widetilde{P}(H)$ に対して、$p = p_1 p_2 p_3 \cdots\cdots$,

ここで、

$p_1 \in \overline{P}(A\mathbb{R}_+^\circ)$,

$p_2 \in P(\Omega \mid A\mathbb{R}_+^\circ)$,

$p_{2n+1} \in \overline{P}(A\mathbb{R}_+^\circ \mid H_n)$,

$p_{2n+2} \in P(\Omega \mid H_n A\mathbb{R}_+^\circ)$, $n \geq 1$。

$\widetilde{\mathcal{P}}(H)$ に σ^*-field を与えると、$\widetilde{\mathcal{P}}(H)$ は Polish space の Borel subset になる。$\widetilde{\mathcal{P}}(H_n)$, $n \geq 1$ についても同様に定義する。(cf. [3])

各 $\pi \in \Pi$, $(x, s) \in Z$ に対して、

$$\mu(x, s) \equiv \inf\{t - s \mid \pi(x, s) \neq \pi(x, t),\ t > s\},$$

$$\nu_1 \equiv \min\{\nu(x,s), \mu(x,s)\},\quad \nu_n \equiv \min\{\nu(\omega(\xi_{n-1})), \mu(\omega(\xi_{n-1}))\},$$

$n \geq 2$, ただし、$\xi_0 = s$, $\xi_m = s + \nu_1 + \cdots + \nu_m$, $m \geq 1$.

各 $\omega \in \Omega$, $n \geq 1$ に対して、$\omega_n : \mathbb{R}_+ \to Z$ をすべての $t \geq 0$ に対し、

$$\omega_n(t) = \begin{cases} (x_{n-1}(\omega), t) & \text{if } t < \xi_n(\omega), \\ (x_n(\omega), t) & \text{otherwise}, \end{cases}$$

と定める、ただし、$x_m(\omega)$ は $\omega(\xi_m) = (x_m(\omega), \xi_m(\omega))$, $m \geq 1$ となる state である。

$\Omega_n \equiv$ ω_n $(\omega \in \Omega)$ の全体, $n \geq 1$.

各 $n \geq 1$, $\omega \in \Omega$ に対し、

$$t_{n1} \equiv \mu(x_n(\omega), \xi_n(\omega)),\quad t_{nk} \equiv \mu(x_n(\omega), \xi_n(\omega) + t_{n1} + \cdots + t_{nk-1}),$$
$k \geq 2$.

$$T_{nk}(\omega) \equiv \xi_n(\omega) + t_{n1} + \cdots + t_{nk},\quad n \geq 1,\ k \geq 1.$$

$$D_{nl} \equiv \left\{ (\omega, \omega') \in \Omega\Omega \;\middle|\; \begin{array}{l} x_n(\omega) = x_l(\omega') \text{ かつ} \\ [\xi_n(\omega), \xi_n(\omega) + t_n) \cap [\xi_l(\omega'), \xi_l(\omega') + t_l') \neq \emptyset \end{array} \right\}$$

$n \geq 1$, $1 \leq l \leq n$,

ただし、 $t_n = \mu(w(\xi_n))$, $t'_\ell = \mu(w'(\xi_\ell))$.

$I_{n\ell}$: $D_{n\ell}$ 上の indicator.

各 $\pi\in\Pi$, $n\geqq 1$, $s\geqq 0$ に対して

$H^\pi_n(s) \equiv A\mathbb{R}^s_+\Omega_1 \cdots A\mathbb{R}^s_+\Omega_n$,

$\mathcal{B}(H^\pi_n(s))$: $H^\pi_n(s)$ の Borel field.

<u>Lemma 3.1.</u> $\pi\in\Pi$, $z=(x,s)\in Z$, $p\in\widetilde{P}(H)$ とする。このとき、 $p=P^\pi_z$ であるため必要十分条件は、すべての $n\geqq 1$ に対して、$E_{nm}\in\mathcal{B}(H^\pi_n(s))$, $m\geqq 1$ が存在して、すべての $m\geqq 1$ に対し、$p(E_{nm}) = P^\pi_z(E_{nm})$。

証明は長くなるので略す。

次の2つの lemma は、Strauch [16] の Lemma 7.1, 7.2 に類似な結果である。

<u>Lemma 3.2.</u> r が ZH 上の任意の有界 Borel-可測関数であるとする。このとき、pr は $Z\widetilde{P}(H)$ 上で Borel-可測である。

$M(H_n) \equiv H_n$ 上の有界な Borel-可測関数の全体, $n\geqq 1$.

$\Lambda \equiv \{(z,p)\in Z\widetilde{P}(H) \mid p=P^\pi_z \text{ for some } \pi\in\Pi\}$.

<u>Lemma 3.3.</u>　Λ は、$Z\widetilde{P}(H)$ の Borel subset である。

（証明）　簡単にふれる；

$r_{nm}, m \geq 1$ を $\widetilde{P}(H_n)$ の点を separate する $M(H_n)$ の countable subset とする。$n \geq 1$。

各 $m \geq 1$ に対して、

$$\Lambda_{1m} \equiv \left\{ (z,p) \in Z\widetilde{P}(H) \,\middle|\, \begin{array}{l} \int r_{1m}(a_1, t_1, \omega)\, dp(a_1, t_1, \omega) \\ \qquad = \int r_{1m}(a_1, t_1, \omega)\, dP_z^{(a_1,t_1)}(\omega_1)\, dp(a_1, t_1) \end{array} \right\},$$

$$\Lambda_{nm} \equiv \left\{ (z,p) \in Z\widetilde{P}(H) \,\middle|\, \begin{array}{l} \int r_{nm}(a_1, t_1, \omega, \cdots, a_n, t_n, \omega)\, dp(a_1, \cdots, \omega) \\ = \int r_{nm}(a_1, \cdots, \omega)\, dP_{\omega(\xi_{n-1})}^{(a_n,t_n)}(\omega_n)\, dp(a_1, \cdots, a_n, t_n) \end{array} \right\},$$

$n \geq 2,$

ただし、$\pi \in \Pi$, $z \in Z$, $\omega \in \Omega$ に対し、$\pi(z) = a_1$, $\mu(z) = t_1$, $\pi(\omega(\xi_n)) = a_{n+1}$, $\mu(\omega(\xi_n)) = t_{n+1}$, $n \geq 1$, また、$P_{\omega(\xi_{n-1})}^{(a_n,t_n)}$ は、Ω_n 上の確率測度 $P_{\omega(\xi_{n-1})}^{\pi}$ を表わす。

$$\widehat{\Lambda}_{nl} \equiv \left\{ (z,p) \in Z\widetilde{P}(H) \,\middle|\, \begin{array}{l} \iint I_{nl}\, p_{2n+1}(a_l, \xi_l(\omega) + t'_l - \xi_n(\omega) \mid \omega(\xi_n)) \\ \qquad \cdot\, dp\, dp = p \otimes p(D_{nl}) \end{array} \right\},$$

$n \geq 1,\ 1 \leq l \leq n.$

$$\overline{\Lambda}_j \equiv \left\{ (z,p) \in Z\widetilde{P}(H) \,\middle|\, p\left(\lim_{k \to \infty} T_{jk}(\omega) = \infty \right) = 1 \right\}, \quad j \geq 1.$$

このとき、

$$\Lambda = \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \Lambda_{1m} \right) \cap \left[\bigcap_{n=2}^{\infty} \left\{ \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \Lambda_{nm} \right) \cap \left(\bigcap_{l=1}^{n-1} \widehat{\Lambda}_{n-1\,l} \right) \right\} \right] \cap \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{\Lambda}_j \right)$$

となり、それで Lemma 3.2 から Λ は、$Z\widetilde{P}(H)$ の Borel subset である。□

Theorem 3.1. τ を、すべての $\pi\in\Pi$, $s\geq 0$ に対して $\tau\in C_s(\pi)$ となるような stopping time とする。このとき、$v^*=\sup_{\pi\in\Pi}\varphi_\tau^\pi$ は、Z 上で universally measurable である。

(証明). ω_z を、initial state が $z\in Z$ であるような sample path とすると、$g(\omega_z(t))$ は $Z H$ 上の有界 Borel-可測な関数である。これと Lemma 3.2 から、$\bar{v}(z,p)=\int g(\omega_z(t))\,dp$ は (z,p) の Borel-可測関数である。

ところが、$v^*(z)=\sup_{p\in\Lambda_z}\bar{v}(z,p)$、ただし、$\Lambda_z=\{p \mid (z,p)\in\Lambda\}$。 $B_\alpha=\Lambda\cap\{(z,p)\in Z\,\mathcal{P}(H) \mid \bar{v}(z,p)>\alpha\}$ とすると、Lemma 3.3 から、B_α は Borel。

$C_\alpha=\{z \mid v^*(z)>\alpha\}$ とすると、これは B_α の projection なので analytic。ゆえに C_α は universally measurable set である。□

§4. Optimal return

次の定義は、Shiryayev [14] に類似なものである。

Definition 4.1. f を、Z 上の有界な universally measurable な関数とする。

(i) 自然数 $N<\infty$ と $\pi\in\Pi$ に対して

f が (N,π)- excessive

$\Leftrightarrow$ 各 $(x,s) \in S \times [0,N)$ に対して、

$$f(x,s) \geqq E^{\pi}_{(x,s)}[f(Z^{\pi}_t)], \quad t \in [s,N],$$

$$\lim_{t \downarrow s} f(Z^{\pi}_t) \geqq f(x,s) \qquad P^{\pi}_{(x,s)}\text{-a.s.} \; .$$

(ii) $N < \infty$ に対して

f が N-excessive

$\Leftrightarrow$ すべての $\pi \in \Pi$ に対して、f が (N,π)-excessive.

(iii) f が excessive

$\Leftrightarrow$ すべての $N < \infty$ に対して、f が N-excessive.

(iv) f が "majorant of g"

$\Leftrightarrow$ すべての $z \in Z$ に対して、$f(z) \geqq g(z)$.

Definition 4.2. f を、"majorant of g" かつ N-excessive な関数とする。

f : smallest N-excessive majorant of g

$\Leftrightarrow$ 任意の "majorant of g" かつ N-excessive な関数 h に対して、すべての $z \in S \times [0,N]$ に対し $f(z) \leqq h(z)$.

(同様にして、smallest excessive majorant of g を定義する。)

各々の自然数 $N < \infty$ と $\pi \in \Pi$ に対して、列 $\{v^{\pi}_{N}(n)\}_{n=0,1,2,\cdots}$ を次の関係式で定める;

$$v_N^n(\pi)(x,s) = \max\left\{ g(x,s),\ E^\pi_{(x,s)}\left[v_N^n(\pi)(Z^\pi_{k_n(s)}) \right] \right\},$$
$$\text{if } (x,s) \in S \times [0, N),$$

$$v_N^n(\pi)(x,s) = g(x,s) \qquad \text{otherwise},$$

ただし、$k_n(s) = \min_i \left\{ i \cdot 2^{-n} \mid i \cdot 2^{-n} > s \right\}$.

各 $N < \infty$, $\pi \in \Pi$ に対して,

$$v_N(\pi)(x,s) \equiv \lim_{n \to \infty} v_N^n(\pi)(x,s), \qquad (x,s) \in Z,$$

$$V^N(\pi)(x,s) \equiv \begin{cases} \sup_{\tau \in C_s^N(\pi)} \varphi_\tau^\pi(x,s) & \text{if } (x,s) \in S \times [0,N), \\ g(x,s) & \text{otherwise}, \end{cases}$$

とおく、ただし、$C_s^N(\pi) \equiv \left\{ \tau \in C_s(\pi) \mid P^\pi_{(x,s)}(\tau \leqq N) = 1,\ x \in S \right\}$.

各々の自然数 $m < \infty$, $N < \infty$ と各 $\pi \in \Pi$ に対して,

$$\Gamma_N^m(\pi) \equiv \left\{ z \mid v_N(\pi)(z) \leqq g(z) + \frac{1}{m} \right\},$$

$$\sigma_N^m \equiv \inf\left\{ t \geqq s \mid Z_t^\pi \in \Gamma_N^m(\pi) \right\}, \qquad s \geqq 0,$$

とおく。

<u>Theorem 4.1.</u> 各々の $N < \infty$, $\pi \in \Pi$ に対して、

(i) すべての $(x,s) \in Z$ に対し、$v_N(\pi)(x,s) = V^N(\pi)(x,s)$.

(ii) $v_N(\pi)$ は、(N, π)-excessive.

(iii) 各 $x \in S$ に対し、$v_N(\pi)(x,\cdot)$ は R_+ 上で右連続.

(iv) 各々の $m < \infty$ とすべての $(x,s) \in Z$ に対して,

$$v_N(\pi)(x,s) \leqq \varphi^\pi_{\sigma_N^m}(x,s) + \frac{1}{m}.$$

証明は長くなるので略す。

各 $N<\infty$ に対して、

$$U^N(x,s) \equiv \begin{cases} \sup_{\pi\in\Pi,\ \tau\in C_s^N(\pi)} \varphi_\tau^\pi(x,s) & \text{if } (x,s)\in S\times[0,N), \\ g(x,s) & \text{otherwise}, \end{cases}$$

とおく。

<u>Theorem 4.2.</u> 各 $N<\infty$ とすべての $(x,s)\in Z$ に対して、

$$U^N(x,s) = \sup_{\pi\in\Pi} v_{N(\pi)}(x,s) \quad .$$

(証明). Theorem 4.1 の (i) からすぐ。□

各 $N<\infty$, $n\geq 0$ に対して、U_N^n を次の関係式で定める;

$$U_N^n(x,s) = \max\left\{g(x,s),\ \sup_{\pi\in\Pi} E_{(x,s)}^\pi\left[U_N^n(Z_{\tau_n(s)}^\pi)\right]\right\}$$
$$\text{if } (x,s)\in S\times[0,N),$$

$$U_N^n(x,s) = g(x,s) \qquad \text{otherwise} .$$

また、$U_N(x,s) = \lim_{n\to\infty} U_N^n(x,s)$, $(x,s)\in Z$ とおく。

<u>Lemma 4.1.</u> f を、Z 上の有界な universally measurable 関数とする。このとき、各々の $\pi\in\Pi$, $(x,s)\in Z$, $r\in(s,\infty)$ に対して、$\lim_{t\downarrow s} E_{(x,t)}^\pi[f(Z_r^\pi)] = E_{(x,s)}^\pi[f(Z_r^\pi)]$.

(証明). 各 $\pi\in\Pi$, $s<t<r$ に対して、

$$E_{(x,s)}^\pi[f(Z_r^\pi)] = E_{(x,s)}^\pi\left[E_{Z_t^\pi}^\pi[f(Z_r^\pi)]\right]$$
$$= \left(1-G^\pi(x,s:t-s)\right)E_{(x,t)}^\pi[f(Z_r^\pi)]$$
$$+ \int_0^{t-s} G^\pi(x,s:dw)\,Q(dy'|x,s+w,\pi(x,s+w))\cdot$$

$$\cdot P^{\pi}(y', s+w : t, dy) E^{\pi}_{(y,t)}[f(Z^{\pi}_{r})] ,$$

ただし、$G^{\pi}(x,s : h) = P^{\pi}_{(x,s)}(\nu(x,s) \leq h)$, $h \geq 0$,

$$P^{\pi}(x,s ; t, \Lambda) = P^{\pi}_{(x,s)}(X^{\pi}_{t} \in \Lambda) , \quad t \geq s, \quad \Lambda \in \mathcal{B}(S).$$

$\|f\| = \sup_{z \in Z} |f(z)|$ とすると

$$\left| E^{\pi}_{(x,s)}[f(Z^{\pi}_{r})] - E^{\pi}_{(x,t)}[f(Z^{\pi}_{r})] \right| \leq G^{\pi}(x,s : t-s)\|f\| + (t-s)\|f\|.$$

$\|f\| < \infty$, $G^{\pi}(x,s : t-s) \to 0$ (as $t \to s$) なので、

$$\lim_{t \downarrow s} E^{\pi}_{(x,t)}[f(Z^{\pi}_{r})] = E^{\pi}_{(x,s)}[f(Z^{\pi}_{r})] . \quad \square$$

<u>Lemma 4.2.</u> すべての $\pi \in \Pi$ に対して、f^{π} は、Z 上の有界で universally measurable な関数とする。$(x,s) \in Z$ とする。このとき、すべての $\tilde{\pi} \in \Pi$ に対して、$\liminf_{t \downarrow s} f^{\tilde{\pi}}(x,t) \geq f^{\tilde{\pi}}(x,s)$ ならば、任意の $\pi \in \Pi$ に対して、

$$\liminf_{t \downarrow s} \sup_{\tilde{\pi} \in \Pi} f^{\tilde{\pi}}(Z^{\pi}_{t}) \geq \sup_{\tilde{\pi} \in \Pi} f^{\tilde{\pi}}(x,s) \quad P^{\pi}_{(x,s)}\text{-a.s.}.$$

(証明)、π を任意の policy とする。

$\Omega^{\pi}(x,s) \equiv \{ \omega \in \Omega \mid Z^{\pi}_{s}(\omega) = (x,s) \}$ とすると $P^{\pi}_{(x,s)}(\Omega^{\pi}(x,s)) = 1$。

また、各 $\omega \in \Omega^{\pi}(x,s)$ に対して、$h > 0$ が存在して、すべての $t \in [s, s+h)$ に対し $Z^{\pi}_{t}(\omega) = (x,t)$ 。これより、

$\liminf_{t \downarrow s} \sup_{\tilde{\pi} \in \Pi} f^{\tilde{\pi}}(x,t) \geq \sup_{\tilde{\pi} \in \Pi} f^{\tilde{\pi}}(x,s)$ を示せば十分である。

ところが、条件より、

$$\liminf_{t \downarrow s} \sup_{\tilde{\pi} \in \Pi} f^{\tilde{\pi}}(x,t) \geq \sup_{\tilde{\pi} \in \Pi} \liminf_{t \downarrow s} f^{\tilde{\pi}}(x,t) \geq \sup_{\tilde{\pi} \in \Pi} f^{\tilde{\pi}}(x,s) . \quad \square$$

各$\pi\in\Pi$, $N<\infty$, $s\geq 0$, $n\geq 0$ に対して.

$$C_s^{N,n}(\pi)\equiv\left\{\tau\in C_s^N(\pi)\;\middle|\;\tau=s \text{ or } k\cdot 2^{-n},\, k=0,1,2,\cdots,N\cdot 2^{-n}\right\}.$$

任意の$\tau\in C_s^N(\pi)$ と 各 $n\geq 0$ に対して.

$$\tau(n)=\begin{cases} s & \text{if } \tau=s,\\ k\cdot 2^{-n} & \text{if } (k-1)\cdot 2^{-n}\leq\tau<k\cdot 2^{-n},\ s<\tau<N,\\ N & \text{otherwise},\end{cases}$$

とおくと $\tau(n)\in C_s^{N,n}(\pi)$.

<u>Theorem 4.3.</u> 各$N<\infty$ に対して $U^N=u_N$ on Z.

(証明). 明らかに $S\times[N,\infty)$ 上では $U^N=u_N$ 。

$N<\infty$, $(x,s)\in S\times[0,N)$ を任意とする。Furukawa[6] の Theorem 4.1 から、各$n\geq 0$ に対して、u_N^n は 離散時間の場合の意味で、smallest N-excessive majorant of g である。したがって、Shiryayev[14, Chap.II] の Lemma 5 より、任意の $\pi\in\Pi$, $\tau\in C_s^N(\pi)$ に対して.

$$u_N^n(x,s)\geq E_{(x,s)}^{\pi}\left[u_N^n(Z_{\tau(n)}^{\pi})\right]\geq E_{(x,s)}^{\pi}\left[g(Z_{\tau(n)}^{\pi})\right]=\varphi_{\tau(n)}^{\pi}(x,s).$$

path $\omega\in\Omega$ と g の性質から

$$\lim_{h\to 0+} g(Z_{t+h}^{\pi}(\omega))=g(Z_t^{\pi}(\omega)),\quad t\geq 0,$$

なので、$n\to\infty$ とすると $u_N(x,s)\geq\varphi_\tau^\pi(x,s)$ 。

よって、 $u_N(x,s)\geq U^N(x,s)$ 。

一方、[6] の Theorem 3.2 から、 各$n\geq 0$ に対して.

$$u_N^n(x,s)=\sup_{\pi\in\Pi,\,\tau\in C_s^{N,n}(\pi)}\varphi_\tau^\pi(x,s) .$$

$C_s^{N,n}(\pi) \subset C_s^N(\pi)$ なので、 $U_N^n(x,s) \leqq U^N(x,s)$。

$n\to\infty$ とすると、 $U_N(x,s) \leqq U^N(x,s)$。 □.

<u>Theorem 4.4</u> 各 $N<\infty$ に対して.

(i) U_N は Z 上で universally measurable.

(ii) U_N は smallest N-excessive majorant of g.

(証明). (i). Theorem 4.1.-(i), 4.2, 4.3 から

$$U_N(x,s) = \begin{cases} \lim\limits_{m\to\infty} \sup\limits_{\pi\in\Pi} \varphi^{\pi}_{\sigma_N^m}(x,s) & \text{if } (x,s)\in S\times[0,N), \\ g(x,s) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

Theorem 3.1 により. $\sup\limits_{\pi\in\Pi} \varphi^{\pi}_{\sigma_N^m}$ は $S\times[0,N)$ 上で、universally measurable なので、U_N は Z 上で universally measurable である。

(ii). 最初に、任意の $\pi\in\Pi$ と各 $(x,s)\in S\times[0,N)$ に対して、$\lim\limits_{t\downarrow s} U_N(Z_t^\pi) \geqq U_N(x,s)$ $P^\pi_{(x,s)}$-a.s. を示す。 $n\geqq 0$ を任意にとる。 Lemma 4.1 から、各 $k=1,2,\cdots,N\cdot 2^n$, $(x,s)\in S\times[N-k\cdot 2^{-n}, N-(k-1)\cdot 2^{-n})$ に対して、

$$\lim_{t\downarrow s} E^{\tilde\pi}_{(x,t)}\left[U_N^n(Z^{\tilde\pi}_{\tau_{k,n}(s)})\right] = E^{\tilde\pi}_{(x,s)}\left[U_N^n(Z^{\tilde\pi}_{\tau_{k,n}(s)})\right] \text{ for all } \tilde\pi\in\Pi.$$

これと Lemma 4.2 から、任意の $\pi\in\Pi$ と各 $k=0,1,\cdots,N\cdot 2^{-n}$, $(x,s)\in S\times[N-k\cdot 2^{-n}, N-(k-1)\cdot 2^{-n})$ に対して、

$$\liminf_{t\downarrow s} \sup_{\tilde\pi\in\Pi} E^{\tilde\pi}_{Z_t^\pi}\left[U_N^n(Z^{\tilde\pi}_{\tau_{k,n}(s)})\right] \geqq \sup_{\tilde\pi\in\Pi} E^{\tilde\pi}_{(x,s)}\left[U_N^n(Z^{\tilde\pi}_{\tau_{k,n}(s)})\right]$$

$P^\pi_{(x,s)}$-a.s.。

したがって、u_N^n の定め方から、任意の $\pi\in\Pi$ と 各 k,
$(x,s)\in S\times[N-k\cdot 2^{-n}, N-(k-1)\cdot 2^{-n})$ に対して、

$$\liminf_{t\downarrow s} u_N^n(Z_t^\pi) \geq u_N^n(x,s) \quad P_{(x,s)}^\pi\text{-a.s.},$$

すなわち、これは 任意の $\pi\in\Pi$ と 各 $(x,s)\in S\times[0,N)$ に対して成立する。 $u_N=\sup_{n\geq 0} u_N^n$ なので、$n\to\infty$ とすると、任意の $\pi\in\Pi$ と 各 $(x,s)\in S\times[0,N)$ に対して、

(4.1) $$\liminf_{t\downarrow s} u_N(Z_t^\pi) \geq u_N(x,s) \quad P_{(x,s)}^\pi\text{-a.s.} 。$$

次に、各 $\pi\in\Pi$, $(x,s)\in S\times[0,N)$ とすべての $t\in[s,N]$ に対して、 $u_N(x,s) \geq E_{(x,s)}^\pi[u_N(Z_t^\pi)]$ を示す。
$\pi\in\Pi$ と $(x,s)\in S\times[0,N)$ を任意にとる。 $t=s$ のとき、明らかに、 $u_N(x,s)=E_{(x,s)}^\pi[u_N(Z_t^\pi)]$ 。
各 $t\in T_s^N\equiv\{k\cdot 2^{-n}\mid k\cdot 2^{-n}>s, k=1,2,\cdots,N\cdot 2^{-n}, n=0,1,\cdots\}$ に対して、 $t=k\cdot 2^{-n}$ となる n と k がとれる。 u_N^n の定め方から、

$$u_N^n(x,s)\geq E_{(x,s)}^\pi[u_N^n(Z_{k\cdot 2^{-n}}^\pi)] = E_{(x,s)}^\pi[u_N^n(Z_t^\pi)] 。$$

$n\to\infty$ とすると、

(4.2) $$u_N(x,s)\geq E_{(x,s)}^\pi[u_N(Z_t^\pi)] 。$$

各 $t\notin T_s^N\cup\{s\}$ に対しては、 列 $\{t_m\}_{m=1}^\infty$ を $t_m\in T_s^N$ $m=1,2,\cdots$, $t_m\downarrow t$ (as $m\to\infty$) となるようにとれる。(4.1), (4.2) と Fatou の lemma より、

$$u_N(x,s)\geq E_{(x,s)}^\pi[\liminf_{m\to\infty} u_N(Z_{t_m}^\pi)] \geq E_{(x,s)}^\pi[u_N(Z_t^\pi)] 。$$

さらに u_N は、明らかに、"majorant of g" 。

N-excessive な u_N の "smallest" 性については、省略する。□

任意の $\pi\in\Pi$, $\tau\in C_s(\pi)$ と各 $(x,s)\in Z$ に対して、$P^{\pi}_{(x,s)}(\tau<\infty)=1$ であり、また、g は有界なので、明らかに、$\liminf_{N\to\infty}\int_{(\tau>N)} g^-(Z^{\pi}_N)\,dP^{\pi}_{(x,s)}=0$, ただし、$g^-=\max\{0,-g\}$。

$u\equiv\lim_{N\to\infty}u_N$ とおく。

<u>Theorem 4.5.</u> (i) u は Z 上で universally measurable.

(ii) u は、smallest excessive majorant of g.

(iii) Z 上で $u=u^*$.

(iv) 各 $x\in S$ に対して、$u(x,\cdot)$ は $\mathbb{R}_+$ 上で右連続。

(証明). (i), (ii) は Theorem 4.4 から簡単に示される。

(iii) $\pi\in\Pi$, $(x,s)\in Z$, $\tau\in C_s(\pi)$ を任意にとる。各 $N<\infty$ に対して、$\tau_N\equiv\min(\tau,N)$ とおくと、$\tau_N\in C^N_s(\pi)$ なので、

$$\int_{(\tau\leq N)} g(Z^{\pi}_{\tau})\,dP^{\pi}_{(x,s)}=E^{\pi}_{(x,s)}[g(Z^{\pi}_{\tau_N})]-\int_{(\tau>N)} g(Z^{\pi}_N)\,dP^{\pi}_{(x,s)}$$
$$\leq U^N(x,s)+\int_{(\tau>N)} g^-(Z^{\pi}_N)\,dP^{\pi}_{(x,s)}.$$

$N\to\infty$ とすると、$E^{\pi}_{(x,s)}[g(Z^{\pi}_{\tau})]\leq u(x,s)$。

したがって、π としては、任意なので、$U^*(x,s) \leq U(x,s)$。

逆に、U^* と U^N の定義より、各 $N<\infty$ に対して、$U^N(x,s) \leq U^*(x,s)$。$N \to \infty$ とすると、$U(x,s) \leq U^*(x,s)$。

(iv)、(ii) により、U は、excessive であるので、Blumenthal-Getoor [1, Chap. II, Therem 2.12] から、各 $(x,s) \in Z$ に対して、mapping $t \longrightarrow U(Z_t^\pi)$ は $[s,\infty)$ 上で右連続、$P_{(x,s)}^\pi$-a.s.。各 $\pi \in \Pi$, $(x,s) \in Z$ に対して、

$\hat{\Omega}^\pi(s) \equiv \{\omega \in \Omega \mid t \to U(Z_t^\pi)$ が $[s,\infty)$ 上で右連続$\}$ とすると、各 $\pi \in \Pi$, $(x,s) \in Z$ に対して、$P_{(x,s)}^\pi(\hat{\Omega}^\pi(s) \cap \Omega^\pi(x,s)) = 1$,

さらに、$\omega \in \hat{\Omega}^\pi(s) \cap \Omega^\pi(x,s)$ に対して、$h>0$ が存在して、すべての $t \in [s, s+h)$ に対して、$Z_t^\pi(\omega) = (x,t)$。したがって、各 $\pi \in \Pi$, $(x,s) \in Z$ に対して、

$$\lim_{t \downarrow s} U(x,t) = \lim_{t \downarrow s} U(Z_t^\pi) = U(Z_s^\pi) = U(x,s) \quad P_{(x,s)}^\pi\text{-a.s.}$$

ゆえに、各 $x \in S$ に対して、$U(x,\cdot)$ は $\mathbb{R}_+$ 上で右連続。□

§5. Optimality equation

$F \equiv Z$ 上の有界 Borel-可測な関数の全体.

各 $\pi \in \Pi$ に対して、$\tilde{F}^\pi$ を、各 $(x,s) \in Z$ に対し、$\lim_{t \downarrow 0} E_{(x,s)}^\pi[f(Z_{s+t}^\pi)] = f(x,s)$ となるような $f \in F$ の全体とおく。

各 $\pi \in \Pi$, $f \in \tilde{F}^\pi$ に対して、

$$h(x,s) \equiv \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\left\{ E^{\pi}_{(x,s)}[f(Z^{\pi}_{s+t})] - f(x,s)\right\}, \quad (x,s)\in Z,$$

が存在して、$h \in \hat{F}^{\pi}$ のとき、$h = \mathcal{A}^{\pi}f$ とかき、operator $\mathcal{A}^{\pi}$の定義域を $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{\pi})$，また $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \equiv \bigcap_{\pi\in\Pi}\mathcal{D}(\mathcal{A}^{\pi})$ とおく。

<u>Lemma 5.1.</u> $f\in F$ は、$\frac{d^+}{ds}f$ が存在して有界かつ、各 $x\in S$ に対して、$\frac{d^+}{ds}f(x,\cdot)$ が R_+ 上で右連続であるような関数とする。このとき、$f\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$、かつ、任意の $\pi\in\Pi$ と各 $(x,s)\in Z$ に対して、

$$\mathcal{A}^{\pi}f(x,s) = \frac{d^+}{ds}f(x,s) + \lambda(x,s,\pi(x,s))\left[\int_S f(y,s)Q(dy|x,s,\pi(x,s)) - f(x,s)\right].$$

(証明). Stone[15] と同様にして証明できる。([15] の Lemma 3.1)

$\Gamma \subset Z$ が次のことをみたすとき、Γ を admissible stopping set という； 各 $x\in S$ と任意の有限区間 I に対して、非負の整数 $m<\infty$ と $\{\Gamma_n\}_{n=0}^{m}$ が存在して、

(i) $\Gamma_0 = \Phi$ かつ Γ_n, $n=1,2,\cdots,m$ は closed または left-closed な区間

(ii) $\Gamma(x)\cap I = \bigcup_{n=0}^{m}\Gamma_n$, ただし、$\Gamma(x) = \{s\geq 0 \mid (x,s)\in\Gamma\}$。

任意の $\pi\in\Pi$ と admissible stopping set Γ に対して、

$$\tau_{\Gamma} \equiv \inf\{t\geq s \mid Z^{\pi}_t \in \Gamma\}, \quad s\geq 0,$$

とおく。$\mathcal{J}$ を、すべての $\pi\in\Pi$，$s\geq 0$ に対して $\tau_{\Gamma}\in C_s(\pi)$ となる admissible stopping set Γ の全体とする。

h ; $0 < h \leqq \infty$ を fix する。各 $\pi \in \Pi$, $(x,s) \in Z$, $\Gamma \in \mathcal{J}$ に対して、 $\delta_1(\Gamma) \equiv \min\{h, \nu(x,s), \tau_\Gamma - \eta_0\}$ とおく。ただし、$\eta_0 = s$ 。同様にして、

$$\delta_n(\Gamma) \equiv \min\{h, \nu(Z^\pi_{\eta_{n-1}}), \tau_\Gamma - \eta_{n-1}\}, \quad n \geqq 2,$$

とおく。ただし、$\eta_m = s + \delta_1(\Gamma) + \cdots + \delta_m(\Gamma)$, $m \geqq 1$ 。

任意の $\pi \in \Pi$ と、各 $(x,s) \in Z$, $\Lambda \in \mathcal{B}(S)$, $w \geqq 0$ に対して、

$$H^\pi(x,s,\Lambda,w) \equiv P^\pi_{(x,s)}\left[X^\pi_{\eta_1} \in \Lambda \text{ かつ } \delta_1(\Gamma) \leqq w\right], \Gamma \in \mathcal{J},$$

とおく。

<u>Definition 5.1.</u> $\Gamma \in \mathcal{J}$ とする。

$\pi^* \in \Pi$ が Γ-optimal

$\Longleftrightarrow$ すべての $(x,s) \in Z$ に対して、$\varphi^{\pi^*}_{\tau_\Gamma}(x,s) = \sup_{\pi \in \Pi} \varphi^\pi_{\tau_\Gamma}(x,s)$ 。

$\pi^* \in \Pi$ を Γ-optimal として、各 $\pi \in \Pi$ に対して、

$$\psi^\pi(x,s) \equiv \int_Z \varphi^{\pi^*}_{\tau_\Gamma}(y, s+w)\, H^\pi(x,s,dy,dw), \quad (x,s) \in Z,$$

とおく。

<u>Lemma 5.2.</u> $\Gamma \in \mathcal{J}$ とする。 $\pi^* \in \Pi$ が Γ-optimal ならば、すべての $(x,s) \in Z$ に対して、

$$\varphi^{\pi^*}_{\tau_\Gamma}(x,s) = \sup_{\pi \in \Pi} \psi^\pi(x,s) \text{ 。}$$

(証明). Stone [15] の Theorem 5.1 と同様にして、証明できる。

$\Gamma^* \equiv \{z \in Z \mid u^*(z) = g(z)\}$ とおいて、特に $\sigma^* = \tau_{\Gamma^*}$ とおく。さらに、subset $B \subset Z$ に対して、

$$S(B) \equiv \{x \in S \mid (x,s) \in B \quad \text{for some } s \geq 0\}$$

とする。

<u>Theorem 5.1.</u> $\Gamma^* \in \mathcal{J}$ かつ、$S(\Gamma^*)$ 上で $\frac{d^+}{ds} g$ が存在し有界で、各 $x \in S(\Gamma^*)$ に対して、$\frac{d^+}{ds} g(x,\cdot)$ は $\mathbb{R}_+$ 上で右連続であると仮定する。このとき、

(π^*, σ^*) : optimal

$\rightleftarrows$ (i) $\varphi^{\pi^*}_{\sigma^*} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$

(ii) $\varphi^{\pi^*}_{\sigma^*}$: majorant of g

(iii) $\varphi^{\pi^*}_{\sigma^*}$ が次の関係式をみたす；

$$\begin{cases} \max\limits_{\pi \in \Pi} \mathcal{A}^{\pi} f(z) = 0 & \text{for all } z \notin \Gamma^*, \\ f(z) = g(z) & \text{for all } z \in \Gamma^*. \end{cases}$$

(証明). (π^*, σ^*) が optimal とする。$\Gamma^* \in \mathcal{J}$ なので π^* は明らかに Γ^*-optimal。

$(x,s) \notin \Gamma^*$ とすると $\Gamma^* \in \mathcal{J}$ なので、$h > 0$ が存在して、すべての $h' \in [0,h]$ に対して $(x, s+h) \notin \Gamma^*$。それで、$\delta_1(\Gamma^*) = \min\{h, \nu(x,s)\}$ としてよい。Lemma 5.2により、任意の $\pi \in \Pi$ に対して、

$$\varphi^{\pi^*}_{\sigma^*}(x,s) \geq \int_Z \varphi^{\pi^*}_{\sigma^*}(y, s+w)\, H^{\pi}(x,s,dy,dw)$$

$$= \left(1 - G^{\pi}(x, s : h)\right) \varphi_{\rho*}^{\pi*}(x, s+h) +$$

$$+ \int_0^h G^{\pi}(x, s; dw) \int_S \varphi_{\rho*}^{\pi*}(y, s+w)\, Q\left(dy \mid x, s+w, \pi(x, s+w)\right)$$

$$= \exp\left\{-\int_0^h \lambda(x, s+s', \pi(x, s+s'))\, ds'\right\} \cdot \varphi_{\rho*}^{\pi*}(x, s+h)$$

$$+ \int_0^h \lambda(x, s+w, \pi(x, s+w)) \exp\left\{-\int_0^w \lambda(x, s+s', \pi(x, s+s'))\, ds'\right\} \cdot$$

$$\cdot \int_S \varphi_{\rho*}^{\pi*}(y, s+w)\, Q\left(dy \mid x, s+w, \pi(x, s+w)\right) dw \,.$$

π と Q の性質から、十分小さい h をとると、

$$\varphi_{\rho*}^{\pi*}(x, s) \geq \exp\left\{-\int_0^h \lambda^{\pi}(x, s+s')\, ds'\right\} \cdot \varphi_{\rho*}^{\pi*}(x, s+h)$$

$$+ \int_0^h \lambda^{\pi}(x, s+w) \exp\left\{-\int_0^w \lambda^{\pi}(x, s+s')\, ds'\right\} \cdot$$

$$\cdot \int_S \varphi_{\rho*}^{\pi*}(y, s+w)\, Q^{\pi}(dy \mid x, s)\, dw \,,$$

ただし、 $\lambda^{\pi}(x, s+s') \equiv \lambda(x, s+s', \pi(x, s))$, $s' \in [0, h]$

$$Q^{\pi}(\cdot \mid x, s) \equiv Q(\cdot \mid x, s, \pi(x, s)) \,。$$

したがって、

$$\frac{1}{h}\left[\varphi_{\rho*}^{\pi*}(x, s) - \varphi_{\rho*}^{\pi*}(x, s+h)\right]$$

$$\geq \frac{1}{h} \int_0^h \lambda^{\pi}(x, s+w) \exp\left\{-\int_0^w \lambda^{\pi}(x, s+s')\, ds'\right\} \cdot \tag{5.1}$$

$$\cdot \left[\int_S \varphi_{\rho*}^{\pi*}(y, s+w)\, Q^{\pi}(dy \mid x, s) - \varphi_{\rho*}^{\pi*}(x, s+h)\right] dw \,。$$

(5.1) において、$\pi = \pi^*$ とすると 等式が成立する。g が有界であるので、$\varphi_{\rho*}^{\pi*}$ も有界。 これと λ の有界性から、

(5.1) において、$\pi=\pi^*$ とすると右辺は有界である。このとき、十分小さい $h>0$ に対して、

$$\left|\varphi^{\pi^*}_{\rho^*}(x,s)-\varphi^{\pi^*}_{\rho^*}(x,s)\right| \leq h\cdot L \quad 。$$

これは、すべての $(x,s)\notin\Gamma^*$ に対して、$\varphi^{\pi^*}_{\rho^*}(x,s)$ は s で右連続であることを示している。したがって、(5.1)で、$\pi=\pi^*$ とし、$h\to 0+$ とすると、$\frac{d^+}{ds}\varphi^{\pi^*}_{\rho^*}$ が $(\Gamma^*)^c$ 上で存在し、有界であり、さらに、すべての $(x,s)\notin\Gamma^*$ に対して、$\frac{d^+}{ds}\varphi^{\pi^*}_{\rho^*}(x,s)$ は s で右連続である。よって、(5.1) において $h\to 0+$ とすると、任意の $\pi\in\Pi$ に対して、

$$-\frac{d^+}{ds}\varphi^{\pi^*}_{\rho^*}(x,s) \geq \lambda^{\pi}(x,s)\left[\int_S \varphi^{\pi^*}_{\rho^*}(y,s)\,Q^{\pi}(dy\,|\,x,s)-\varphi^{\pi^*}_{\rho^*}(x,s)\right]$$

これより、すべての $z\notin\Gamma^*$ に対して、

$$\max_{\pi\in\Pi} \mathcal{A}^{\pi}\varphi^{\pi^*}_{\rho^*}(z)=0 \quad 。$$

また、$(x,s)\in\Gamma^*$ に対しては、$\varphi^{\pi^*}_{\rho^*}(x,s)=g(x,s)$、それで、$\varphi^{\pi^*}_{\rho^*}$ は Lemma 5.1 での f の条件をみたす。したがって、$\varphi^{\pi^*}_{\rho^*}\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$。さらに、明らかに、$\varphi^{\pi^*}_{\rho^*}\geq g$ なので、必要性は証明された。

次に十分性を示す。(i)〜(iii) を仮定する。このとき、任意の $\pi\in\Pi$ と各 $(x,s)\notin\Gamma^*$ に対して、

$$\mathcal{A}^{\pi}\varphi^{\pi^*}_{\rho^*}(x,s)\leq 0 \quad 。$$

$\pi\in\Pi$, $m<\infty$, $N<\infty$ を任意にとる。すべての $z\in Z$ に対して、$u^*(z)\geq v_N(\pi)(z)\geq g(z)$ なので、$\Gamma^*\subset\Gamma^m_N(\pi)$。

したがって、$\sigma_N^m \leq \sigma^*$ となり、それで、

$$(5.2)\quad E^{\pi}_{(x,s)}\left[\int_s^{\sigma_N^m} \mathcal{A}^{\pi} \varphi^{\pi^*}_{\sigma^*}(Z^{\pi}_t)\,dt\right] \leq 0 \quad , \quad (x,s) \notin \Gamma^* 。$$

しかるに、Dynkin [4, p133] の Corollary から、

$$E^{\pi}_{(x,s)}\left[\int_s^{\sigma_N^m} \mathcal{A}^{\pi} \varphi^{\pi^*}_{\sigma^*}(Z^{\pi}_t)\,dt\right] = E^{\pi}_{(x,s)}\left[\varphi^{\pi^*}_{\sigma^*}(Z^{\pi}_{\sigma_N^m})\right] - \varphi^{\pi^*}_{\sigma^*}(x,s) 。$$

これと (5.2) から、

$$\varphi^{\pi^*}_{\sigma^*}(x,s) \geq E^{\pi}_{(x,s)}\left[\varphi^{\pi^*}_{\sigma^*}(Z^{\pi}_{\sigma_N^m})\right] , \quad (x,s) \notin \Gamma^* 。$$

$\varphi^{\pi^*}_{\sigma^*} \geq g$ なので、Theorem 4.1 の (iv) から、

$$\varphi^{\pi^*}_{\sigma^*}(x,s) \geq E^{\pi}_{(x,s)}\left[g(Z^{\pi}_{\sigma_N^m})\right] \geq v_{N(\pi)}(x,s) - \frac{1}{m} ,$$
$$(x,s) \notin \Gamma^* 。$$

したがって、$\pi \in \Pi$ について supremum をとって、$m \to \infty$ $N \to \infty$ とすると、Theorem 4.2, 4.3, 4.5 より、

$$\varphi^{\pi^*}_{\sigma^*}(x,s) \geq u^*(x,s) \quad , \quad (x,s) \notin \Gamma^* 。$$

また、$(x,s) \in \Gamma^*$ に対しては、$\sigma^* = 0$ なので、$\varphi^{\pi^*}_{\sigma^*}(x,s) = g(x,s) = u^*(x,s)$ 。ゆえに、すべての $z \in Z$ に対して、

$$\varphi^{\pi^*}_{\sigma^*}(z) = u^*(z) 。 \quad \square$$

参考文献

[1]. R.M. Blumental and R.K. Getoor, Markov Processes and Potential Theory, Academic Press, New York, (1968).

[2]. B. Doshi, Continuous time control of Markov processes

on an arbitrary state space : discounted rewards, Ann. Statist. 4 (1976), 1219–1235.

[3]. L. Dubins and D. Freedman, Measurable sets of measure, Pacific J. Math. 14 (1965), 1211–1222.

[4]. E. D. Dynkin, Markov Processes–I, Springer-Verlag, Berlin, (1965).

[5]. A.G. Fakeev, Optimal stopping of a Markov process, Theory Prob. Appl., 16 (1971), 694–696.

[6]. N. Furukawa, Functional equations and Markov potential theory in stopped decision processes, Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ., Ser. A, 29 (1975), 329–347.

[7]. A. Hordijk, Dynamic Programming and Markov Potential Theory, Mathematisch Centrum, Amsterdam, (1974).

[8] P. Kakumanu, Continuously discounted Markov decision model with countable state and action space, Ann. Math. Statist., 42 (1971), 919–926.

[9]. K. Kuratowski, Topology–I, Academic Press, New York, (1966).

[10] B. L. Miller, Finite state continuous time Markov decision processes with an infinite planning horizon, J. Math. Anal. Appl., 22 (1968), 552–569.

[11]. K. R. Parthasarathy, Probability Measures on Metric Spaces, Academic Press, New York, (1967).

[12]. S. R. Pliska, Controlled jump processes, Stoch. Proc. Appl., 3 (1975), 259-282.

[13] U. Rieder, On stopped decision processes with discrete time parameter, Stoch. Proc. Appl., 3 (1975), 365-383.

[14]. A. N. Shiryayev, Statistical sequential analysis, Transl. Math. Monograph., Amer. Math. Soc., (1973).

[15]. L. D. Stone, Necessary and sufficient conditions for optimal control of semi-Markov jump processes, SIAM J. Control, 11 (1973), 187-201.

[16] R. E. Strauch, Negative dynamic programming, Ann. Math. Statist., 37 (1966), 871-890.

[17]. M. E. Thompson, Continuous parameter optimal stopping problems, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, 19 (1971), 302-318.

[18]. M. Yasuda, On the existence of optimal control in continuous time Markov decision processes, Bull. Math. Statist., 15 (1972), 7-17.